Proceedings of IAM, V.9, N1, 2020, pp.72-82

ЧИСЛЕННЫЕ АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ С НЕРАЗДЕЛЕННЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

МАГАРРАМОВ И.А.

Институт Прикладной Математики, БГУ, Баку, Азербайджан
e-mail: meherremov.ilkin.a@gmail.com

Абстракт. Рассматривается линейно квадратичная задача оптимизации с неразделенными краевыми условиями. С помощью первого метода Эйлера строится фундаментальная матрица соответствующей гамильтоновой матрицы, где на ее основе приводятся численные вычисления соответствующих фазовых координат и управлений. Результаты иллюстрируются на примере построения оптимальных программных траекторий и управлений двуногих шагающих аппаратов с телескопическими ногами. Показывается, что они совпадают с известными результатами с точностью до 10^{-2}.

Ключевые слова: краевые условия, метода Эйлера, программных траекторий, шагающий аппарат, линейные системы, алгебраические уравнение

AMS Subject Classification: 49J15, 49J35.:

1. Введение.

В последнее время много внимания уделяется линейно квадратичной задаче оптимизации (ЛКЗО) с двухточечной краевой задачи [1, 13, 20], возникающей при управлении шагающих аппаратов [10], добыче нефти газлифтным способом [9,15], штанго-насосной установкой [10] и др. Во всех этих задачах целью является разработка алгоритмов программных траекторий и управлений и на основе их создание регуляторов, обеспечивающих асимптотическую устойчивость замкнутой системы в цепи обратной связи.

Более интересным является тот факт, что в алгоритмах для решения разработки задачи оптимизации с неразделенными краевыми условиями существуют разные методы - метод алгоритма, повышающего размерность исходной системы в 4 и 2 раза (метод Мошенского [11, 17, 21], метод через фундаментальную матрицу Гамильтоновой системы и др.), разные алгоритмы прогонки [3, 7, 9, 12, 14, 15, 18] и др. В работе [5] приводится алгоритм прогонки для многоточечной краевой задачи управления с неразделенными краевыми условиями, где при переходе от одной последовательной внутренней точки к другой появляется неоднозначность. Поэтому, в работе [5, 6, 8] разрабатывается другой метод, устраняющий эти недостатки.

Все вышеприведенные алгоритмы носят теоретический характер и требуют разработки соответствующего вычислительного алгоритма. В данной работе попытаемся на самом простом алгоритме Эйлера применить его к нахождению решения линейной квадратичной задачи оптимизации с неразделенными двухточечными краевыми условиями через построение фундаментальных матриц соответствующей Гамильтоновой системы. Отметим, что такой подход позволяет с помощью метода Захар-Иткин [22] численно строить фундаментальные матрицы, где для построения подматриц требуется решить уравнение меньшей размерности. Достоинство данного подхода может состоять в том, что можно при их вычислении (подматриц) организовать параллельные вычисления, которые как по времени, так и по точности будет давать хорошие результаты. Предложенный алгоритм иллюстрируется примерами управления шагающими аппаратами с телескопическими ногами [12, 13,17, 19].

2.Постановка задачи.

Пусть движение объекта описывается следующей системой обыкновенных линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = F(t)\,x(t) + G(t)\,u(t) \tag{1}$$

где x - n -мерный фазовый вектор, $u(t)$ - m мерный вектор управляющих воздействий, $F(t)$ - $n \times n$ -мерная матрица функций с непрерывными элементами, $G(t)$ - $n \times m$ -мерная матрица и пара ($F(t)$, $G(t)$) - управляемые.

Требуется найти управляющее воздействие $u(t)$ такое, чтобы заданный квадратичный функционал

$$J = \frac{1}{2}\int_0^T \left(x'(t)Q(t)x(t) + u'(t)C(t)u(t)\right)dt \tag{2}$$

достигал минимального значения, а $x(t)$ в начальной и конечной точках удовлетворял бы следующему неразделенному краевому условию

$$\Phi_1 x(t_0) - \Phi_2 x(T) = q\,. \tag{3}$$

Здесь $Q(t) = Q'(t) \geq 0,\, C(t) = C'(t) > 0$ симметричные матрицы $n \times n$ и $m \times m$ размерностей соответственно, Φ_1, Φ_2 - постоянные матрицы $k \times n$ размерностей, q постоянный k -мерный вектор, пары $\left[\Phi_1 - \Phi_2\right]$ с вектором q удовлетворяют условию Кронекера – Капелли, штрих означает операцию транспонирования.

3. Алгоритм, повышающий размерность исходной системы (1).

Составляем расширенный функционал [6] соответствующей задачи оптимизации (1)-(3) и на основе этих напишем уравнение Эйлера Лагранжа

$$\begin{vmatrix} \dot{x} \\ \dot{\lambda} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} F(t) & -G(t)C^{-1}(t)G'(t) \\ -Q(t) & -F'(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} \tag{4}$$

с краевыми условиями (3) и

$$\left.\begin{aligned}\lambda(0) &= -\Phi_1'\nu \\ \lambda(T) &= \Phi_2'\nu\end{aligned}\right\}, \tag{5}$$

где $\lambda(t)$ - n- мерный вектор и ν - k - мерный вектор множителей Лагранжа соответствующей системы управлений (1) и краевых условий (3), а Гамильтонова матрица H имеет вид

$$H(t) = \begin{bmatrix} F(t) & -G(t)C^{-1}(t)G'(t) \\ -Q(t) & -F'(t) \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Теперь, используя первый метод Эйлера, вычисляем фундаментальную матрицу (4), (5) в следующем виде

$$\Phi(t_{i+1}, t_i) = (H(t_i)\Delta + E)\,\Phi(t_i,\, t_{i-1}), \quad \Phi(t_0, t_0) = E, \tag{7}$$

где Δ - шаг численного интегрирования, E -единичная матрица. Пусть $t = 0, 1,\ N-1$ и $T = t_N$. Используя формулу (7) вычислим в конце интервала $(0, T)$

$$\begin{aligned}\Phi(T, t_0) &= \left(H(t_N, t_{N-1})\Delta + E\right)\times \\ &\times\left(H(t_{N-1}, t_{N-2})\Delta + E\right)\ldots\left(H(t_1, t_0)\Delta + E\right)\end{aligned} \tag{8}$$

и разделим $\Phi(t_N, t_0)$ в виде

$$\Phi(t_N, t_0) = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(t_N, t_0) & \Phi_{12}(t_N, t_0) \\ \Phi_{21}(t_N, t_0) & \Phi_{22}(t_N, t_0) \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Тогда неизвестные $x(t_0)$ и ν определяются через следующую систему линейных алгебраических уравнении [6]

$$D\begin{bmatrix} x(t_0) \\ \nu \end{bmatrix} = w \quad , \tag{10}$$

Где

$$D = \begin{bmatrix} -\Phi_{22}^{-1}(\tau, t_0)\ \Phi_{21}(\tau, t_0) & \left(-\Phi_{22}^{-1}(\tau, t_0)\Phi_2' + \Phi_1'\right) \\ \Phi_1 - \Phi_2\ (\Phi_{11}(\tau, t_0) - \Phi_{12}(\tau, t_0)\Phi_{22}^{-1}(\tau, t_0)\Phi_{21}(\tau, t_0) & \Phi_2\ \Phi_{12}(\tau, t_0)\Phi_{22}^{-1}(\tau, t_0)\Phi_2' \end{bmatrix}, \tag{11}$$

$$w = \begin{bmatrix} 0 \\ q \end{bmatrix}.$$

Тогда , как в [22,23], координаты объектов определяются

$$x(t_i) = \Phi_{11}(\tau_i, t_0)x(t_0) - \Phi_{12}(t_i, t_0)\Phi_1'\quad \nu, \tag{12}$$

а управляющее воздействие $u(t_i)$ имеет вид

$$u(t_i) = -C^{-1}(t_i)G'(t_i)\Phi_{21}(t_i,t_0)x(t_0) + C^{-1}(t_i)G'(t_i)\Phi_{22}(t_i,t_0)\Phi_1'\ \nu . \qquad (13)$$

Теперь иллюстрируем полученные результаты на примере простой модели управления шагающих аппаратов с телескопическими ногами [13,17,19].

Пример. В качестве примера рассмотрим задачу выбора программы горизонтального движения простейшей модели двуногого шагающего аппарата (ША) (см. Фиг.1) (управление сильно демпфированными системами) [17,19]. Тогда из (1), (3)

$$F = \begin{bmatrix} 0 & E \\ -A_1^{-1} & \dfrac{A}{E}A_1^{-1}T \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ A_1^{-1} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} 10\varepsilon^2 & 0 \\ 0 & 10\varepsilon^2 \end{vmatrix}, \qquad (14)$$

Где

$$A_1 = \begin{bmatrix} mh^2 + 2m_0\left[(h-r)^2\rho^2\right] & m_0\left[(h-r)r-\rho^2\right] \\ m_0\left[(h-r)r-\rho^2\right] & m_0(r^2+\rho^2) \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} mh + 2m_0(h-r) & m_0 r \\ m_0 r & -m_0 r \end{bmatrix}$$

$$T = diag\left[0.5\ \ 0.5\right]. \qquad (15)$$

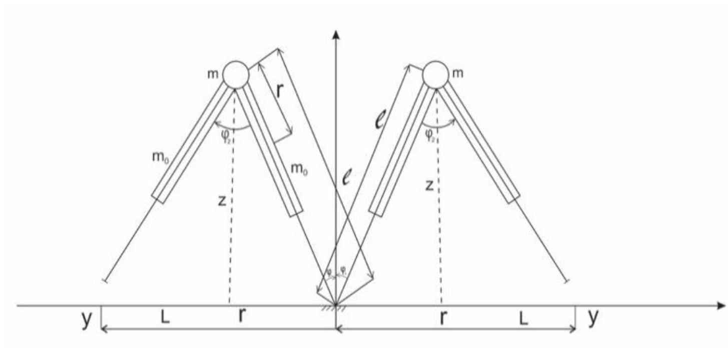
Параметры $m_0,\ m,\ \rho,\ h,\ r$ принимают следующие конкретные значения (ε -малый параметр):

$$m_0 = 1.019\text{кг}\cdot\text{c}^2\cdot\text{m}^{-1}\cdot(10\text{кг}), \quad m = 4.994\text{кг}\cdot\text{c}^2\cdot\text{m}^{-1}\cdot(49\text{кг})$$

$$r = 0{,}3\text{м}, \quad \rho = 024248\text{м}, \quad h = 1.045\text{м}, \quad r = 0.5\text{c}.$$

Краевые условия определяются из симметричности конфигурации ША в начале и конце шага при плавной походке [17,19],

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \\ 0&0&0&0 \end{bmatrix}, \Phi_2 = \begin{bmatrix} 0&0&0&0 \\ -1&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&-1&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&-1 \end{bmatrix}, q = \begin{bmatrix} -0.25 \\ 0.25 \\ -0.5 \\ 0.5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$



С помощью формул (7) и из-за стационарности уравнений (1), (13), (14), (15) $\Phi(t_i\,,\,t_{i+1})$ вычисляется в виде

$$\Phi(t_i, t_{i+1}) = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(t_1, t_0) & \Phi_{12}(t_1, t_0) \\ \Phi_{21}(t_1, t_0) & \Phi_{22}(t_1, t_0) \end{bmatrix} \tag{16}$$

где

$$\Phi_{11}(t_5, t_0) = \begin{bmatrix} -847.586 & 1996.56 & -1675.31 & 64930.9 \\ -36705.5 & 86377.3 & -72508.3 & 2.80904E+06 \\ -57545.2 & 135415 & -113672 & 40384E+06 \\ -2.48949E+06 & 5.85834E+06 & -4.91776E+06 & 1.90519E+08 \end{bmatrix} \tag{17}$$

$$\Phi_{12}(t_5, t_0) = \begin{bmatrix} -938.515 & 12996.5 & 63658.9 & -881482 \\ -40605.9 & 362265 & 2.75404E+06 & -3.81347E+07 \\ -63658.9 & 881482 & 4.31761E+06 & -5.97852E+07 \\ -2.75404E+06 & 3.81347E+07 & 1.86789E+08 & -2.58643E+09 \end{bmatrix}$$

$$\Phi_{21}(t_5,t_0)=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\Phi_{22}(t_5,t_0)=\begin{bmatrix}0.912149 & -0.0085018 & 0.319529 & 0.0190086\\ -0.0132465 & 1.01476 & 0.0490603 & -0.0267692\\ -0.339528 & -0.00726907 & 0.378108 & 0.00274245\\ 0.00776965 & -0.013189 & -0.00706089 & 0.108969\end{bmatrix}$$

Теперь вычислим матрицу D из (11) .
Получим

$$D=\begin{bmatrix}F_1 & F_2\\ F_3 & F_4\end{bmatrix} \quad , \qquad (18)$$

где

$$F_1=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\-1826.4653925 & 4300.0866209 & -3608.9922349 & 139843.6336519\\0&1&0&0\end{bmatrix};$$

$$F_2=\begin{bmatrix}1 & 0.8292011 & 0 & -0.2719241 & 1.1325173 & 0 & -18.5944911\\ 0 & -0.0106571 & 1 & 1.6284962 & -0.9029474 & 0 & 43.7065303\\ 0 & 0.7344337 & 0 & -0.5195751 & -0.1618203 & 0 & -36.6562929\\ 0 & 0.4676171 & 0 & 20.9580226 & -32.8355364 & 1 & 1422.4625024\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0 & -789039.9482 & 0 & -39813409.55 & 62150628.59 & 0 & -2704275944.77\\ 0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix};$$

$$F_3=\begin{bmatrix}-79053.7755 & 186032.441 & -156163.3281 & 6049921.156\\ 123936.1422 & -291648.142 & 244821.9454 & -9484680.244\\ 0&0&0&1\\ -5361700.821 & 12617297.208 & -10591538.66 & 410326589.83\end{bmatrix};$$

$$F_4 = \begin{bmatrix} 0 & -34135477.42 & 0 & -1722410005.92 & 2688764019.26 & 0 & -116992541442.4 \\ 0 & 53515423.06 & 0 & 2700284439.02 & -4215272566.5 & 0 & 183413436977.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2315186203.60 & 0 & -116819807640.69 & 182361281209.9 & 0 & -7934839057628.2 \end{bmatrix}.$$

Здесь $w' = [0,\ -0.25,\ 0.25,\ -0.5,\ 0.5,\ 0,\ 0,\ 0]$. Теперь при этих данных решаем систему линейных алгебраических уравнений (10) с помощью метода Гаусса [25] и имеем $x(t_0)$ в виде

$$x(t_0) = \begin{bmatrix} -0.25 \\ -0.5 \\ 1.04102 \\ -6.98E-16 \end{bmatrix}.$$

Из [13, 17] (где вычисление проводились методом Рунге-Кутта 4-го порядка) можно уточнить, что результаты совпадают с точностью до 10^{-2} порядка. Если интервал (t_0, T) разделим на 20 точек, то результаты совпадают с [12] с точностью до 10^{-3} порядка.

Вышеприведенный алгоритм позволяет применить его к редуцированному построению фундаментальных матриц $\Phi(t_i,\ t_{i+1})$, которое позволяет распаралелировать вычислительных процессов.

Заключение. Предлагается простой вычислительный алгоритм решения линейных квадратичных задач оптимизации с неразделенными краевыми условиями, с помощью которого в дальнейшем можно построить параллельный вычислительный алгоритм для ее решения. Эта простота дает возможность решать задачи такого типа с большей размерностью при добыче нефти газлифтным способом [6,8,20].

ЛИТЕРАТУРА

1. Aliev F.A., Abbasov A.N., Mutallimov M.M. Algorithm for solution of the problem of optimization of the energy expenses at the exploitation of chinks by subsurfase - pump installations, Appl. Comput. Math. , V.1, N.1, 2004, pp.2-9.
2. Aliev F.A., Ismailov N.A. Inverse problem to determine the hydraulic resistance coefficient in the gas lift process, Appl. Comput. Math., N.3, 2013, pp.306-313.
3. Aliev F.A., Ismailov N.A., Temirbekova L.N. Methods of solving the choice of extremal modes for the gas-lift process, Appl. Comput. Math., V.1, N.1, 2012, pp.348-357.

4. Aliev F.A., Larin V.B., Akin O.et.all On a symmetrization of the boundary value problem. 2002, Appl. Comput. Math.., V.1, N.1, pp.
5. Aliev F.A. Comments on ‘Sweep algorithm for solving optimal control problem with multi-point boundary conditions’, Advances in Difference Equations, N.2, 2016, 131 p.
6. Aliev F.A., Mutallimov M.M., Maharramov I.A., Huseynova N.Sh., Amirova L.I., About one sweep algorithm for solving linear-quadratic optimization problem with unseparated two-point boundary conditions, Sahand Communications in Mathematical Analysis, V.17, N.1, 2020, pp.99-107.
7. Maksudov F.G., Aliev F.A., Optimization of the impulse systems with the nondivided boundary-value conditions, Doklady Akademii Nauk SSSR, N.4, 1985, pp.796-798.
8. Mutallimov M.M., Amirova L.I., Aliev F.A., Faradjova Sh.A., Maharramov I.A. Remarks to the paper: sweep algorithm for solving optimal control problem with multi-point boundary conditions, TWMS J. Pure Appl. Math., V.9, N.2, 2018, pp.243-246.
9. Mutallimov M.M., Zulfugarova R.T., Amirova L. I. Sweep algorithm for solving optimal control problem with multi-point boundary conditions, Advances in Difference Equations, N.1, 2015, pp.1-13.
10. Абрамов А. А., О переносе граничных условий для систем линейных обыкновенных дифферециалъных уравнений (вариант метода прогонки), ЖВМ и МФ, N.2, 1961, сс.542-545.
11. Абрамов А. А., Бураго Н.Г., Динкин В.В. и др. Пакет прикладных программ для решения линейных двухточечных краевых задач, Сообщение по программному обеспечению ЭВМ, М.: ВЦ АН СССР, 1982, 63 с.
12. Алиев Ф.А. Задача оптимизации с неразделенными двухточечными краевыми условиями, 1985 Известия АН СССР, сер. техн. кибернетика, 138 с..
13. Алиев Ф.А. Выбор программы движения шагающего аппарата с дискретным временем для сингулярного случая, 1983, В сб.Системы навигации и управления, Изд-во ИМ АН УССР, 13 с.
14. Алиев Ф.А., Джамалбеков М.А., Ильясов М.Х. Математическое моделирование и управление газлифтом, Известия РАН Теория и системы управления, N.5, 2011, с.121-130.
15. Алиев Ф.А., Задача оптимального управления линейной системой с неразделенными двухточечными граничными условиями, 1986, Дифференциальные уравнения,Т.22, N.2, с.345-347
16. Алиев Ф.А. Ильясов М.Х., Нуриев Н.Б.., Задачи моделирования и оптимальной стабилизации газлифтного процесса, Прикладная механика, N.6, 2010, сс.113-122.

17. Алиев Ф.А. Методы Решения Прикладных Задач Оптимизации Динамических Систем, Баку, Элм, 1989, 320 с.
18. Алиев Ф.А, Исмаилов Н.А., Мухтарова Н.С., Алгоритм нахождения оптимального решения одной задачи с граничным управлением, , 2015, Автоматика и телемеханика, N.4, с.97-104
19. Бордюг Б.А., Владимир Б. Л., Тимошенко А. Г. Задачи Управления Шагающими Аппаратами, 1985, Наук. думка.
20. Муталлимов М.М., Алиев Ф.А. Методы решения задач оптимизации при эксплуатации нефтяных скважин. Монография. LAMBERT Academic Publishing Gmbh&Co, KG Germany, 2012, 164 p.
21. Полак Э. Чиленные Методы Оптимизации, М.: Мир, 1974, 376 с.
22. Захар-Иткин М.Х. Матричное дифференциальное уравнение Риккати и полугруппа дробно-линейных преобразований, УМН, V.28, N.3, 1973, сс.83-120.

NUMERICAL ALGORITHMS FOR SOLVING THE OPTIMIZATION PROBLEM WITH UNSEPARATED BOUNDARY CONDITIONS

MAHARRAMOV I.A.

Institute of Applied Mathematics, Baku State University
e-mail:meherremov.ilkin.a@gmail.com

Abstract

In the paper the quadratic optimization problem with unseparated boundary conditions is considered. Using the first Euler method, the fundamental matrix of the corresponding Hamiltonian matrix is constructed, where numerical calculations of the corresponding phase coordinates and controls are based on it. The results are illustrated by the example of constructing optimal programmed trajectories and controls of bipedal walking devices with telescopic legs. It is shown that they coincide with the known results with an accuracy of 10^{-2}.

Keywords: boundary conditions, Euler method, programmed trajectories, linear algebraic systems equations

REFERENCES

1. Aliev F.A., Abbasov A. N., Mutallimov M. M., Algorithm for solution of the problem of optimization of the energy expenses at the exploitation of chinks by subsurfase - pump installations, Appl. Comput. Math., V.1, N.1, 2004, pp.2-9.
2. Aliev F.A., Ismailov N.A., Inverse problem to determine the hydraulic resistance coefficient in the gas lift process, Appl. Comput. Math., N.3, 2013, pp.306-313.

3. Aliev F.A., Ismailov N.A., Temirbekova L.N., Methods of solving the choice of extremal modes for the gas-lift process, Appl. Comput. Math., V.1, N.1, 2012, pp.348-357.
4. Aliev F.A., Larin V.B., Akin O. On a symmetrization of the boundary value problem. Int.Jour. Appl. Comput. Math.., V.1, N.1, 2002, pp.
5. Aliev F.A. Comments on ‘Sweep algorithm for solving optimal control problem with multi-point boundary conditions’, Advances in Difference Equations, N.2, 2016, 131 p.
6. Aliev F.A., Mutallimov M.M., Maharramov I.A., Huseynova N.Sh. Amirova L.I. About one sweep algorithm for solving linear-quadratic optimization problem with unseparated two-point boundary conditions, Sahand Communications in Mathematical Analysis, V.17, N.1, 2020, pp. 99-107.
7. Maksudov F.G., Aliev F.A., Optimization of the impulse systems with the nondivided boundary-value conditions, Doklady Akademii Nauk SSSR, N.4, 1985, pp.796-798.
8. Mutallimov M.M., Amirova L.I., Aliev F.A., Faradjova Sh.A., Maharramov I.A. Remarks to the paper: sweep algorithm for solving optimal control problem with multi-point boundary conditions, Twms J. Pure Appl. Math., V.9, N.2, 2018, pp.243-246.
9. Mutallimov M. M., Zulfugarova R.T. , Amirova L. I., Sweep algorithm for solving optimal control problem with multi-point boundary conditions, Advances in Difference Equations, N.1, 2015, pp.1-13.
10. Abramov A.A. O perenose granichnykh uslovii dlia sistem lineinykh obyknovennykh differetsial"nykh uravnenii (variant metoda progonki), ZhVM i MF, N.2, 1961, s. 542-545.
11. Abramov A.A., Burago N.G., Dipkin V.V., i dr. Paket prikladnykh programm dlia resheniia lineinykh dvukhtochechnykh kraevykh zadach, Soobshchenie po programmnomu obespecheniiu EVM, M.: VTs AN SSSR, 1982, 63 s.
12. Aliev F.A. Zadacha optimizatsii s nerazdelennymi dvukhtochechnymi kraevymi usloviiami, 1985 Izvestiia AN SSSR, ser. tekhn. kibernetika, 138 c..
13. Aliev F.A. Vybor programmy dvizheniia shagaiushchego apparata s diskretnym vremenem dlia singuliarnogo sluchaia, 1983, V sb.Sistemy navigatsii i upravleniia, Izd-vo IM AN USSR, 13 c..
14. Aliev F.A., Dzhamalbekov M.A., Il'iasov M.Kh. Matematicheskoe modelirovanie i upravlenie gazliftom, Izvestiia RAN Teoriia i sistemy upravleniia, N.5, 2011, s.121-130.
15. Aliev F.A., Zadacha optimal'nogo upravleniia lineinoi sistemoi s nerazdelennymi dvukhtochechnymi granichnymi usloviiami, 1986, Differentsial'nye uravneniia,T.22, N.2, c.345-347.
16. Aliev F.A., Il'iasov M.Kh., Nuriev N.B. Zadachi modelirovaniia i optimal'noi stabilizatsii gazliftnogo protsessa, Prikladnaia mekhanika, N.6, 2010, s. 113-122.
17. Aliev F.A. Metody Resheniia Prikladnykh Zadach Optimizatsii Dinamicheskikh Sistem, Baku, "Elm", 1989, 320 s.
18. Aliev F.A, Ismailov N.A., Mukhtarova N.S., Algoritm nakhozhdeniia

optimal'nogo resheniia odnoi zadachi s granichnym upravleniem, , 2015, Avtomatika i telemekhanika, N.4, c.97-104.

19. Bordiug B.A., Vladimir B. L., Timoshenko A. G. Zadachi Upravleniia Shagaiushchimi Apparatami, 1985, Nauk. dumka..
20. Mutallimov M.M., Aliev F.A. Metody resheniia zadach optimizatsii pri ekspluatatsii neftianykh skvazhin. Monografiia. LAMBERTAcademicPublishingGmbh&Co, KGGermany, 2012, 164 s.
21. Polak E. Chilennye Metody Optimizatsii, M.: Mir, 1974, 376 s.
22. Zakhar-Itkin M.Kh., Matrichnoe differentsial'noe uravnenie Rikkati i polugruppa drobno-lineinykh preobrazovanii, UMN, V.28, N.3, 1973, s.83-120.